Новікова Наталія Володимирівна,

викладач вищої категорії, викладач-методист

Машинобудівного коледжу Донбаської державної

машинобудівної академії, м. Краматорськ.

**Метод конструювання завдань в математиці**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Постановка проблеми**

 В статті проаналізовано типові завдання з геометрії та обґрунтовано доцільність застосування метода конструювання задач при навчанні математиці. З`ясовано, що використання даного методу дозволяє викладачу розширити проблемно- пошуковий діапазон завдань для всіх рівнів навчання. Показано, що застосування метода конструювання задач дає змогу налагодити зворотній зв`язок зі студентами під час навчання математики та перевірити рівень засвоєння знань та умінь студентами з дисципліни.

**Аналіз попередніх досліджень**

Ця тема вже досить давно зацікавила різних викладачів, та якщо намагатися знайти [відповідь](http://ua-referat.com/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8C) на це питання в різних джерелах [3,4,5], буде зрозуміло , що в більшості з них були представлені лише типові завдання, завдання, які отримані на їх основі. А труди таких вчених, як Н.П. Тучніна [1] , І.М. Шаригіна [2] , В.М. Фінкельштейна [6] відображають важливі, але лише певні та не систематизовані сторони дослідження даної проблеми.

**Мета дослідження**

Проведені дослідження ставили за мету описати метод конструювання завдань для більш досконалого використання проблемно- пошукового методу при складанні викладачем різнорівневих завдань.

**Метод конструюванія завдань в математиці**

Так як завдання бувають різні: навчальні, конкурсні, олімпіадні, завдання пастки і т.д., конструювати їх можна теж по-різному: можна створювати умови задачі на основі власних спостережень, а можна - вибираючи опорою якісь дані. [Саме](http://ua-referat.com/%D0%A1%D0%B0%D0%BC%D0%B5" \o "Саме) цей вид [конструювання](http://ua-referat.com/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D1%80%D1%83%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F" \o "Конструювання) і розглядається в даній статті.

Розв`язування задачі часто вимагає нестандартного аналітичного [мислення](http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F" \o "Мислення), а значить і її складання вимагає [того](http://ua-referat.com/%D0%A2%D0%BE%D0%B3%D0%BE) ж самого. Існує декілька способів конструювання:  перефразування,конструкція,узагальнення, окремий [випадок](http://ua-referat.com/%D0%92%D0%B8%D0%BF%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%BA" \o "Випадок), варіювання.умов. До кожного з них було складено алгоритм конструювання, який спрощуєскладаннязавдання.

**1.Перефразування.**  
 Цей прийом ділиться на декілька видів, перший з яких так і називається: перефразування.   
 1.1. *Перефразування.* Цей спосіб конструювання можна використовувати для самоконтролю. Якщо [студент](http://ua-referat.com/%D0%9B%D1%8E%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0) легко може перефразувати задачу, значить, він знає, що дано, і що потрібно отримати, бачить співвідношення між ними. Якщо він опанував і способом розв`язування, то в подальшому без особливих зусиль зможе вирішитибудь-яку .подібнузадачу.

Алгоритм конструювання:

1.1.1.Виділення опорних тверджень. Завдання бувають різні: на знаходження і на [доведення](http://ua-referat.com/%D0%94%D0%BE%D0%BA%D0%B0%D0%B7" \o "Доказ). В завданнях на [доведення](http://ua-referat.com/%D0%94%D0%BE%D0%BA%D0%B0%D0%B7" \o "Доказ) основними [поняттями](http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%BE%D0%BD%D1%8F%D1%82%D1%82%D1%8F" \o "Поняття) є умова і висновок; в задачах на знаходження - дані і невідомі величини. В задачах на знаходження часто особливо виділяють завдання на побудову будь-якої [геометричної](http://ua-referat.com/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F" \o "Геометрия) [фігури](http://ua-referat.com/%D0%A4%D1%96%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%B8" \o "Фігури). Завдання на знаходження і завдання на доказ тісно пов'язані. Найчастіше, дізнавшись доказ тієї чи іншої теореми, студенти розв`язують завдання на знаходження, в яких теорема знаходить своє безпосереднє застосування.

1.1.2. Розв`язування завдання.  Це необхідно для того, що б надалі перевірити, чи не вплинуло перефразування на хід розв'язання і результат завдання.

1.1.3. [Вибір](http://ua-referat.com/%D0%92%D0%B8%D0%B1%D1%96%D1%80" \o "Вибір) тверджень для перефразування і їх зміна. Найчастіше це заміна будь-якого слова або визначення, що допомагає "завуалювати" твердження або дію.

1.1.4. Перефразування.

1.1.5. Розв`язування отриманого завдання.

Приклад 1: При розв`язуванні задачі на трикутну піраміду, яка вписана в конус може виникнути наступне твердження: "Знайти гіпотенузу за двома катетами" [3,с.217]. цю фразу можна замінити на наступну " знайти діаметр кола за двома хордами. які виходять з однієї точки кола та спираються на цей діаметр ", тому що сенс не зміниться.

*1.2.* *Заміна фігури.*

Алгоритм конструювання:

1.2.1. Виділення основної фігури завдання.

1.2.2. Розв`язування завдання.

1.2.3. Заміна фігури та уточнення отриманого завдання.

Приклад 2:  В темі «Аксіоми стереометрії, розташування прямих у просторі» можно розглянути таку задачу "На площині зазначено п'ять точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Побудуйте п'ятикутник, в якому дані точки є серединами сторін". [1,с.38]

Для наочності накреслимо на площині п'ятикутникА1А2А3А4А5 і відзначимо середини сторін В1,В2,В3,В4,В5. Так якщо б завдання було розв`язано. Проведемо в п'ятикутнику діагональ і отримаємо дві фігури: чотирикутник і трикутник, середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма. Поєднавши точки В2, В3, В4, отримаємо трикутник і добудуємо його до паралелограма і знайдемо середину діагоналі, яка паралельна прямій В1 В5 (по теоремі про середні лінії трикутника). Таким чином, можна легко побудувати точки А1, А2 і А5, а знаючи їх А3, А4, за допомогою паралелограма. Замінимо п'ятикутник на семикутник. Для цього потрібно взяти не п'ять, а сім точок, будь-які три з яких не лежать на одній

прямій. У результаті виходить досить важке завдання: "На площині визначено сім точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Побудуйте семикутник, для якого ці точки є серединами сторін".

*1.3.* *Переклад завдання з геометричної мови на алгебраїчну та навпаки.*

У результаті таких перетворень зазвичай виходять цікаві завдання, які мають складне рішення. Цей спосіб перефразування ілюструє тісну взаємодію алгебри і геометрії. Звичайно,[переклад](http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4) можливий не тільки з геометричної мови на алгебраїчну, але і навпаки, хоча рішення алгебраїчних завдань на геометричній мові зустрічається набагато рідше, зважаючи на складність і характерність розв`язування.

Алгоритм конструювання:

1.3.1. [Вибір](http://ua-referat.com/%D0%92%D0%B8%D0%B1%D1%96%D1%80" \o "Вибір) умов, які можна замінити алгебраїчними виразами.

1.3.2. Розв`язування завдання.

1.3.3. Зміна умов.

1.3.4. Редактування формуліровок.

1.3.5. Розв`язування отриманого завдання.

Приклад 3: В прямокутному паралелепіпеді довжина, ширина та висота дорівнюють відповідно 3см, 3см, 4см. З вершини основи побудовано дві діагоналі в сусідніх бокових гранях. Знайти кут між діагоналями.

1 спосіб 2 спосіб

∆ВАА1 (< А = ) знайдемо за тео- Знайдемо координати радіус-векторів ВА1 та ВС1:

ремою Піфагора ВА1: ВА1 = 5см. ВА1(3;0;4), ВС1(0;3;4)

∆ВСС1 (< А = ) знайдемо за тео- Знайдемо cos < А1ВС1

ремою Піфагора ВС1: ВС1 = 5см.

∆В1С1А1 (< В1 = ) знайдемо за

т. Піфагора С1А1: С1А1 = 3√2см. 

За теоремою cos маємо:

18 = 25 + 25 – 50cos < А1ВС1

cos < А1ВС1 = 16/25

*1.4.* *Перехід від прямого твердження до зворотнього.*

Деякі завдання і теореми мають одну цікаву особливість: вони вірні, якщо їх вирішувати від початку до кінця, і вірні, якщо логічний ланцюжок висновків рухається у зворотному напрямку, тобто дані і невідомі величини змінюються місцями.

Алгоритм складання:

1.4.1. Виявлення даних і невідомих величин.

1.4.2. Розв`язування задачі або доведення теореми.

1.4.3. Перехід даних величин в невідомі і навпаки.

1.4.4. Повторне розв`язування у зворотному напрямку.

1.4.5. Точне формулювання завдання.

Хочеться визначити, що не кожна задача має зворотнє [переформулювання](http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4).

Приклад 4:  Розглянемо задачу з теми «Вектори»: "Вектори колінеарні, якщо виконується умова а=kв" .[3, с.131] Формулювання нового завдання: "Якщо вектори колінеарні, то виконується умова а=kв ".

**2. Конструкція.**

У завданнях цього типу вибудовується структура, частинами якої беруться завдання чи теореми, але даний спосіб конструювання має і зворотний перехід: найчастіше складне завдання можна розкласти на більш прості складові, що застосовуються для розв`язування складних.

[Перетворення](http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F) завдань одного типу в задачі іншого типу - одне з [найпростіших](http://ua-referat.com/%D0%9D%D0%B0%D0%B9%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%D1%88%D1%96" \o "Найпростіші) творчих вправ і часто рекомендується для самостійної роботи.   
Деякі завдання конструюються авторами під обрану ідею розв`язування. Так само можна сконструювати завдання "під відповідь".

Алгоритм конструювання:

2.1. Вибір завдання, тверджень, розв`язування або результатів для створення конструкції.

2.2. Розв`язування задач або доказ тверджень (якщо завдання конструюється під відповідь або спосіб розв`язування цей пункт можна виключити).

2.3. Вибір "деталей" для майбутньої конструкції (даний пункт також необхідний лише в тому випадку, коли використовуються завдання чи теореми).

2.4. Об'єднання або коригування обраних даних.

2.5. Уточнення формулювання.

2.6. Розв`язування отриманного завдання.

**3.** **Окремий випадок.**

Іноді поставлена ​​задача виявляється настільки складною, що не піддається розв`язуванню, тоді використовується наступний спосіб: розв`язується частина завдання або розглядається кілька завдань, аналогічних даної, що і називається використанням "окремого випадку". Буває, що викладачу не вистачає якоїсь простої задачі для ілюстрації нової теореми, тоді теж може допомогти "окремий випадок".

В історії є приклади того, що узагальнені теореми не знаходять застосування, а їх "окремі випадки" отримують широке поширення і є одними з найважливіших серед інших теорем математики (прикладом подібної ситуації може виступати теорема Паппа і її "окремий випадок" [теорема Піфагора](http://ua-referat.com/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9F%D1%96%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B0)).

Алгоритм конструювання:

3.1. Розв`язування складної конструкції.

3.2. Деталізованість завдання.

3.3. Зміна умов.

3.4. Пояснення можливої ​​зміни розв`язування.

3.5. Об'єднання та уточнення умов.

3.6. Розв`язування отриманого завдання.

Приклад 5: Завдання: "Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін. (Теорема Птолемея)"[ 4,№ 4 1991р.,с 17]

Для того щоб отримати окремий випадок теореми Птолемея, обраний термін "вписаний чотирикутник"замінемо на"вписаний квадрат". Отримане завдання виглядає так: "Доведіть, що квадрат сторони вписаного квадрата дорівнює двом площам цього квадрата".

Хочеться відзначити, що "Окремий випадок" завжди вирішується [легше](http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%D1%80) ніж завдання, яке було його основою. У деяких випадках між даними і величинами, які ми шукаємо, в задачі загального [характеру](http://ua-referat.com/%D0%A5%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B5%D1%80) існує складна залежність, і розв`язати це завдання елементарними методами не вдається, в той час як окреме завдання цього типу має цілком просте і красиве розв`язування.

**4.** **Варіювання умов.**

Варіювання умов - спосіб конструювання завдань, який може змінити розв`язування і результат завдання шляхом заміни лише одного слова, наприклад, завдання на побудову трикутника за трьома сторонами має елементарне рішення, а якщо замінити "сторони" на "бісектриси", рішення багаторазово ускладнюється. Варіювання умов часто приводить до утворення цілих циклів завдань, дуже схожих один на одного за звучанням, але зовсім різних за типом і складності розв`язування. Варіювання буває різним: в першому випадку змінюється визначення або термін, у другому - рівність чи нерівність, причому ці два способи досить сильно відрізняються на практиці, хоча і схожі в теорії.

Алгоритм конструювання:

4.1. Виділення умов для зміни.

4.2. Зміна вибраних умов.

4.3. Уточнення формулювання.

Приклад 6: Завдання: "У просторі дано дві точки: А і В.

Знайдіть [геометричне](http://ua-referat.com/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F" \o "Геометрия) місце точок С площини *а* таких, що для трикутника АВС має місце рівність: *ahа = вhв* (де *hа* і *hв* - висоти, які опущені на сторони *а* і *в* ). [4. № 9, 1991р.,с.11] Нехай сторону *а* ми замінемо на медіану *ма*, а *в* - на медіану *мв*.   
Нове формулювання: "В просторі дано дві точки: А і В, знайдіть геометричне місце точок С таких, що для трикутникаАВС має місце рівність:   
*ма × hа = hв × ма* ", [4, № 8, 1993р.,с.37]

**5.** **Узагальнення.**

Узагальнення - один з перших способів отримання нових завдань і теорем, хоча далеко не кожне завдання або теорему можна узагальнити. Бурхливий [процес](http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81" \o "Процес) узагальнення [математичних](http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0" \o "Математика) знань і створення все більш і більш абстрактних теорій почалися в дев'ятнадцятому сторіччі, і продовжується до цього часу.

У [процесі](http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81" \o "Процес) розвитку математики багато [математичних понять](http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%96_%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D1%8F%D1%82%D1%82%D1%8F" \o "Математичні поняття) зазнавали значних змін у бік узагальнення. Деякі початкові визначення з більш загальної точки зору виявлялися невдалими, і їх доводилося змінювати, давати нові найменування.

Алгоритм конструювання:

5.1. Виявлення можливості узагальнення.

5.2. Узагальнення обраного факту.

5.3. Уточнення формулювання.

Узагальнення - дуже об`ємне поняття, це і отримання більш абстрактних понять, і перенесення затвердження на більш широку множину об'єктів, і отримання нових інтерпретацій, і перенесення затвердження завдання з площини у [простір](http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%D1%80). З одним з найпростіших узагальнень є [перетворення](http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F" \o "Перетворення) числового зав простим подібне узагальнення, воно може привести до цікавих висновків, а іноді і до створення нових формул.

Приклад 7: Теорема: "Основа хоча б однієї висоти трикутника лежить на [відповідній](http://ua-referat.com/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8C" \o "Відповідь) стороні, а не на її продовження", [4. № 9, 1991р., с.32]

Можливо перенести твердження теореми з площини у простір, а конкретніше: змінити плоску фігуру на об'ємну.  Термін "Трикутник" у разі виходу у простір трансформується в "тетраедр"  Нова теорема буде виглядати так: "Для будь-якого тетраедра основа хоча б однієї висоти належить [відповідної](http://ua-referat.com/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8C" \o "Відповідь) грані тетраедра.

**Висновок.**

[Матеріал](http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%96%D1%8F), який представлен в даній статті, має значення як для викладачів, так і для студентів. Своє застосування для педагогів він може знайти як посібник для складання завдань конкретно до кожного уроку, якщо в [підручниках](http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA" \o "Підручник) і різних [методичних](http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BA%D0%B0" \o "Методичка) посібниках не знайдеться необхідних відомостей або немає задач проблемно- пошукового змісту. Студентам дана робота допоможе не розгубитися перед складним або об'ємним завданням, тому що, знаючи як завдання було складено, знайти рішення набагато простіше.

Розібрана тема необхідна для вивчення історії виникнення завдань, для утворення і рішення простих та складних задач, математичних та життєвих завдань. На прикладі розібраних в роботі [прийомів](http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%B9%D0%BE%D0%BC%D1%83" \o "Прийому) конструювання можна навчитися виділяти опорні пункти в задачі, або ж навпаки, узагальнювати. Важливо те, що дана тема - шлях до нескінченної творчості, а який її вид вибере людина - вирішувати тільки їй самій.

**Література:**

1. Тучнін Н.П. Як задати питання? – К.: Школяр, Освіта, 2001

2. Шаригін І.М. "Звідки беруться завдання?"– Х.: Гімназія, 2005

3. Погорєлов О.В. Геометрія: Підручник для 10-11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів.– К.: Школяр, Освіта, 2001

4. Журнали "Квант".– М.: Педагогічна освіта,1991-2001рр.

5. Сканаві М.І. Збірник завдань з математики для вступників у ВНЗ . – К.: Вища школа, 2002

6. Фінкельштейн В.М. Коли завдання не виходить. – К.: ТОВ «Бліц», 2005